

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Matemáticas discretas

Jueves 15 de noviembre de 2018 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 8]

- (a) Utilice el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de 77 y 105. [3]
- (b) A partir de lo anterior, indique una condición que tenga que cumplir c para que la ecuación diofántica $77x + 105y = c$ tenga una solución. [1]
- (c) Halle todas las soluciones de la ecuación diofántica $11x + 15y = 1$. [4]

2. [Puntuación máxima: 12]

Sea $N = (d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0)_5 = d_n \times 5^n + d_{n-1} \times 5^{n-1} + \dots + d_1 \times 5 + d_0$ la representación de un número entero positivo N en base 5.

Sea $a = (143)_5$ y $b = (24)_5$.

- (a) Calcule lo siguiente, expresando la respuesta en base 5
 - (i) $(a + b)_5$;
 - (ii) $(ab)_5$. [5]
- (b) Muestre que $(d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0)_5$ es exactamente divisible por 4 si y solo si $d_n + d_{n-1} + \dots + d_1 + d_0$ es exactamente divisible por 4. [5]
- (c) Muestre que $(x12x)_5$ no puede ser exactamente divisible por 4. [2]

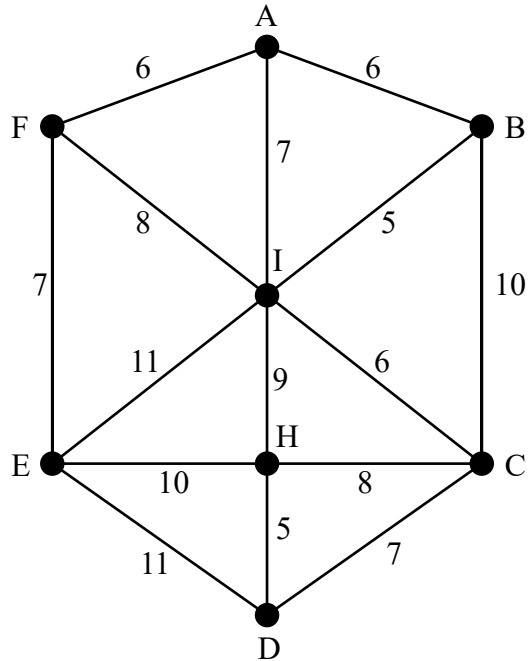
3. [Puntuación máxima: 13]

Un virus contagioso afecta a la población de una pequeña localidad de 5000 habitantes. Sea I_n el número total de personas que hay infectadas al finalizar la semana n -ésima. En la primera semana había 10 casos de personas infectadas y para cuando finalizó la segunda semana había ya 22 casos en total. Se propone un modelo, según el cual el número de casos va aumentando de forma tal que el número de casos nuevos que aparecen en una semana dada es igual a 1,2 veces el número de casos nuevos que hubo la semana anterior.

- (a) Muestre que I_n satisface la siguiente relación de recurrencia: $I_{n+2} - 2,2I_{n+1} + 1,2I_n = 0$. [2]
- (b) Indique las condiciones iniciales apropiadas. [1]
- (c) Resuelva la relación de recurrencia, obteniendo una expresión para I_n en función de n . [6]
- (d) A partir de lo anterior, halle durante qué semana estará ya infectada toda la población. [2]
- (e) Indique dos limitaciones de este modelo. [2]

4. [Puntuación máxima: 17]

Considere el grafo G que aparece representado en la siguiente figura.



- (a) Indique, de manera razonada, si G tiene o no un circuito euleriano. [1]
- (b) Utilice el algoritmo de Kruskal para hallar un árbol generador minimal para G , e indique cuál es su peso total. Indique claramente en qué orden va añadiendo las aristas. [4]

El grafo G es el mapa de un complejo turístico de vacaciones, donde cada vértice representa una casa de este complejo y las aristas representan las carreteras que van de una casa a otra. El peso de cada arista refleja el tiempo, en minutos, que el Sr. José, el guardia de seguridad, tarda en recorrer dicha carretera. La garita del Sr. José se encuentra en la casa A.

- (c) Utilice un algoritmo apropiado para mostrar que el tiempo mínimo que necesita el Sr. José para ir de A a E es 13 minutos. [5]
- (d) Halle el tiempo mínimo que necesita el Sr. José para patrullar todo este complejo turístico, sabiendo que tiene que recorrer todas las carreteras al menos una vez y que ha de empezar y acabar en A. Indique claramente por qué carreteras tiene que pasar más de una vez. [7]